第７講　熱力学Ⅰ

1

次の文章を読んで，［　　　］に適した式か値を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，［［　　　］］は，すでに［　　　］で与えられたものと同じ式を表す。また，問１，問２では，指示にしたがって，解答をそれぞれの解答欄に記入せよ。

気体が外部と熱のやりとりをすることなく行う状態変化を，断熱変化という。以下では，断熱変化を気体の分子運動および熱機関のサイクルから考えてみる。なお，気体は単原子分子の理想気体とする。

(1)　断熱変化を気体の分子運動から考察するため，図１に示すように，周囲から断熱されたシリンダー内に気体が封入されている場合を考える。ピストンはなめらかで摩擦は生じないものとする。ここで，シリンダー内の断面積は S，シリンダー内の初期長さは L，初期体積は $V=SL$ である。シリンダー内には質量 m の分子が多数存在し，運動している。

分子と完全弾性衝突するような平板でできたピストンを，速さ v_p で左方向に動かし，中の気体を圧縮する場合を考える。ここでは，分子とピストンは完全弾性衝突と仮定することにより，ピストンから気体に加えた仕事がすべて気体内の運動エネルギー(＝内部エネルギー)に変換されることで，断熱条件に相当すると考える。なお，分子はピストンに比べはるかに大きい速さで運動しているとし，以下で考察する微小時間 Δt の間にピストンが移動する距離は初期のシリンダー長 L に比べて十分小さいものとする。また，必要ならば，a を任意の実数とするとき，絶対値が１より十分小さな実数 δ($|\delta|\ll 1$)に対し，$(1+\delta)^a \fallingdotseq 1+a\delta$ が成り立つとしてよい。

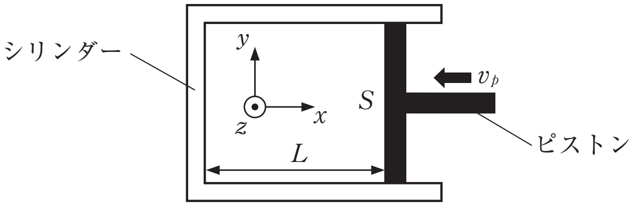


図１

ここで１個の分子に注目しよう。この分子は x，y，z 方向にそれぞれ速さ v_x，v_y，v_z で運動しており，初期状態では，それらは等しいとする。ピストンが静止しているときは，分子がピストンに衝突しても，分子の x 方向の速さ(絶対値)は変わらない。しかし，ピストンが速さ v_p で移動している場合，分子がピストンと１回衝突すると，分子の x 方向の速さは $\Delta v_x=2v_p$ だけ増加する。したがって，１回の衝突で運動エネルギー e は，$\Delta v_x \ll v_x$ であることに注意すると，$\Delta e=$［ あ ］だけ増加すると近似できる。この１個の分子の x 方向の運動について微小時間 Δt を考えると，衝突回数 n は［ い ］(分子の速さは初

＜ Note ＞

期の値 v_x のままであると近似してよい）となる。したがって，n 回の衝突により，１個の分子のエネルギー増加量 Δe_n は，［あ］の n 倍になると近似的に考えると，$\Delta e_n=$［う］$\times mv_x^2$ となる。ここで，Δt の間にピストンが左側に移動する距離を $-\Delta L$（ΔL はピストンの変位で，この場合負の値であることに注意せよ）とすると，［う］から v_p を消去して $\Delta e_n=$［え］と表すことができる。

以下では，上記の分子の運動が気体を構成する全分子の平均的な状態を表していると単純化して考えよう。この場合，初期状態の１個の分子の運動エネルギー e は x，y，z の運動エネルギーを合わせて $e=$［お］$\times mv_x^2$ と表され，系の温度 T はボルツマン定数 k を用いて $T=$［か］$\times mv_x^2$ となる。これに対し，n 回のピストンとの衝突で増加した x 方向の運動エネルギー Δe_n が，引き続く分子間の衝突でどの方向にも均等になると考えれば，先と同様の考え方から，系の温度変化 ΔT は［き］$\times mv_x^2$ となり，ΔT と ΔL の間に $\dfrac{\Delta T}{T}=$［く］という関係式が得られる。この関係式は，断熱圧縮あるいは断熱膨張にともなって温度が増加あるいは減少することを示している。また，前述のように $V=SL$ の関係があり，S は一定であるので L と V は比例関係にあるものとして，$TV^{\frac{2}{3}}=$ 一定という関係式が得られる。なお，これを圧力 p と体積 V の関係式で書き換えると $p\times$［け］$=$ 一定となる。

(2)　断熱変化を含む熱機関のサイクルを考える。熱機関のサイクルの装置には，単原子分子の理想気体が１モル入っており，摩擦は生じないものとする。気体定数を R とするとき，装置内に入っている気体の定積モル比熱は $\dfrac{3}{2}R$ である。なお，気体が外部から吸収した熱量は正で，気体が外部に放出した熱量は負で表すことにする。図２に示すように，断熱変化と定積変化からなる熱機関のサイクル①を考える。体積 V_A の状態Ａから体積 V_B の状態Ｂになるまで断熱圧縮した。次に，状態Ｂから状態Ｃになるまで定積で加熱したのち，状態Ｃから状態Ｄになるまで断熱膨張した。最後に，状態Ｄから状態Ａになるまで定積で放熱した。

状態Ａの温度を T_A，状態Ｂの温度を T_B，状態Ｃの温度を T_C（$T_C>T_B$），状態Ｄの温度を T_D（$T_D>T_A$）とすると，1サイクルにおいて，気体が外部から吸収した熱量は［こ］であり，気体が外部に放出した熱量は［さ］となる。したがって，このサイクルの熱効率は［し］となる。理想気体の断熱変化では，分子運動モデルで示したように，$TV^{\frac{2}{3}}=$ 一定である。この関係式を用いると，体積の比 $\dfrac{V_A}{V_B}$ を ε（$\varepsilon>1$）とした場合のサイクル①の熱効率は［す］となり，このサイクルの熱効率は体積比のみに依存することがわかる。

＜ Note ＞

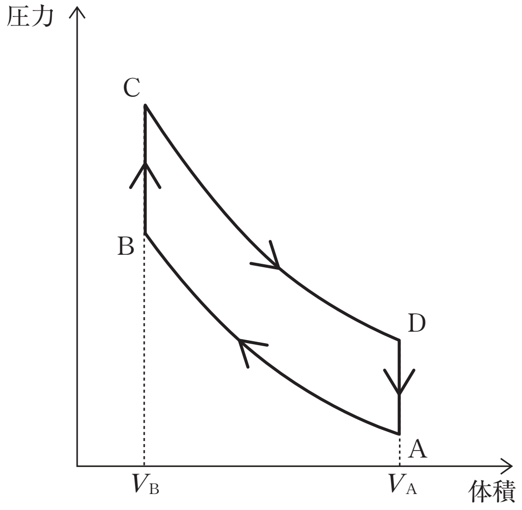


図２

次に，熱機関のサイクルにおける断熱変化と等温変化の相違について考えてみる。図２で考えたサイクル①に対し，次の 1. と 2. のような変化をともなうサイクル②を考える（状態 A および状態 C はそのままである）。

1. 状態 A から等温圧縮で状態 B′ となり，その後，定積加熱で状態 C に至る
2. 状態 C から等温膨張で状態 D′ となり，その後，定積放熱で状態 A に至る

問１　図２を解答欄に書き写し，サイクル②の状態変化を破線で図示せよ。ただし，両者が重なるところは実線とせよ。なお，状態 B と状態 B′ および状態 D と状態 D′ の違いがわかるように図示すること。また，サイクル①とサイクル②で，気体が外部にする仕事はどちらが大きいかを，図を使って説明せよ。

問２　以下の図３を解答欄に書き写し，サイクル①の状態変化を実線で，サイクル②の状態変化を破線で図示せよ。ただし，両者が重なるところは実線とせよ。なお，状態 B と状態 B′ および状態 D と状態 D′ の違いがわかるように図示すること。

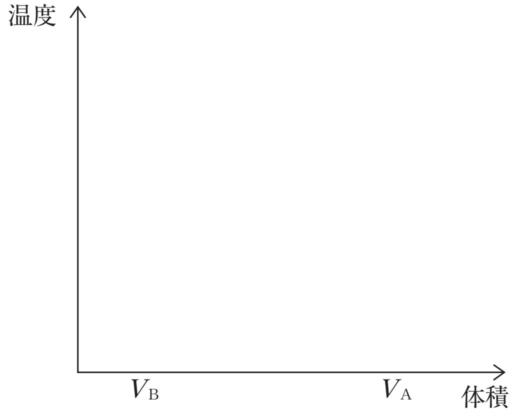


図３

< Note >

2

次の文を読んで，［　　　］には適した式を，また｛　　　｝からは正しいものを選びその番号を，それぞれの解答欄に記入せよ。

(1)　一般に熱の出入りを伴わない状態変化を断熱変化と呼ぶが，気体の断熱変化では，変化の各段階で平衡状態が実現しているならば，(圧力)×(体積)$^{\gamma}$ = 一定という関係が成り立つ。べき定数γは気体の種類によって異なるが，必ず1より大きい値をもつ。以下では，空気に対するべき定数を，γと表す。

空気は断熱性がよいので，大気中の空気のゆっくりとした移動は，断熱変化とみなすことができる。いま，こうした断熱変化をくりかえした結果，大気の圧力や温度は，高度によって決定されているとしよう。また，空気1mol あたりの質量をwとし，この値は高度によらず一定とする。このとき，地表の気温を絶対温度でT_0（以下，温度はすべて絶対温度とする），気体定数をR，地表における空気の密度をρ_0とすれば，地表における大気の圧力は［あ］で与えられる。また，ある高度における大気の温度をTとするとき，その高度での大気の圧力は［い］，密度は［う］と表される。

(2)　さて，大気が上に述べたような状態にあるときに，熱気球を飛ばすことを考えてみよう。気球は断熱性の布でできており，気体の部分を除いた気球の質量はMである。最初，気球は空気が入っていない体積0(ゼロ)の状態であった。飛ばないように気球を固定し，気球の下部が開いた状態で，外気を熱して温度T_1にした空気を体積［え］だけ詰めたところ，気球は浮かび始めた。さらに続けて，温度T_1の空気を気球の体積がVになるまで入れた。このときの気球内の空気の物質量は［お］mol である。また，空気の定積モル比熱をC_Vとすると，気球内に入った空気には，もとの大気の状態から［か］の熱が加えられ，内部エネルギーは［き］だけ増加したことになる。

(3)　ここで，気球の下部を閉じ，固定をはずして気球を飛ばしたところ，ある高度まで上がって静止した。気球内の空気の温度T_1と体積Vが変化しないとすると，この高度での大気の温度は［く］である。さらに，気球の下部を開き，体積はVのまま気球内の空気の温度を［け］にしたとき，気球の高度は変わらなかった。このときの気球内の空気の温度は，｛こ　①　T_1より高い　　②　T_1より低い　　③　T_1と同じである｝。

＜ Note ＞

第７講　確認テスト

次の文を読んで，[　　　]に適した式または数値を，それぞれの解答欄に記入せよ。なお，$|x| \ll 1$，$|y| \ll 1$ を満たす任意の微小量 x，y に対して $\dfrac{1+x}{1+y} \fallingdotseq 1+x-y$ を用いてよい。

(1)　圧力 P の気体の体積 V が微小体積 ΔV だけ増加したとき，気体がされた仕事は[　い　]である。このとき気体の内部エネルギーが ΔU だけ増加すると同時に熱量 Q が気体に流れ込む。この熱量 Q は熱力学の第１法則を考慮すると[　ろ　]と表される。

(2)　モル比熱とは 1mol の気体の温度を 1K 上昇させるのに必要な熱量である。圧力 P，体積 V，温度 T の 1mol の理想気体は状態方程式 $PV=RT$ を満たす。ただし，R は気体定数である。この気体を圧力を一定に保った状態で，体積，温度をそれぞれ ΔV，ΔT だけ変化させると，$\Delta V=$[　は　]ΔT という関係式が成り立つ。したがって，定圧モル比熱 C_P と定積モル比熱 C_V の差は $C_P-C_V=$[　に　]となる。

(3)　1mol の理想気体の圧力，体積，温度をそれぞれ P，V，T から $P+\Delta P$，$V+\Delta V$，$T+\Delta T$ に断熱的に微小変化させてみる。このとき $\dfrac{\Delta T}{T}$ を比熱比 $\gamma=\dfrac{C_P}{C_V}$ を用いて表すと[　ほ　]$\dfrac{\Delta V}{V}$ である。次に状態方程式を考慮して，$\dfrac{\Delta V}{V}$ を P，ΔP，T，ΔT を用いて表すと[　へ　]となるので，$\dfrac{\Delta T}{T}=$[　と　]$\dfrac{\Delta P}{P}$ と書ける。

(4)　今までの議論を踏まえて，地表近くの空気の温度低下率について考えてみよう。地表から 10km 位までの空気の層は対流圏と呼ばれ，空気の塊が重力加速度 g を受けながらゆっくりと上昇または下降する。今，空気を断熱変化をする理想気体とみなし上昇している空気の塊に着目する。密度 ρ の空気の塊が高さ Δz だけ上昇すると，圧力は $-\rho g \Delta z$ だけ変化する。また ρ は 1mol あたりの空気の質量 M および，P，T，R を用いて[　ち　]と表されるので，圧力の変化率は $\dfrac{\Delta P}{P}=$[　り　]Δz という関係を満たす。以上のことから，温度変化率を M，g，γ，R を用いて表すと，$\dfrac{\Delta T}{\Delta z}=$[　ぬ　]となる。

< Note >

第７講　解答

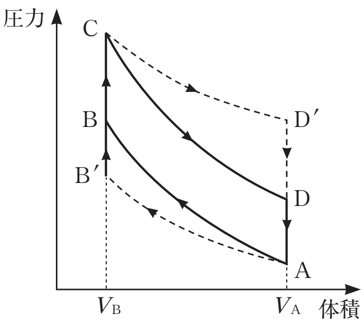
1

あ　$2mv_xv_p$　　い　$\dfrac{v_x\cdot\Delta t}{2L}$　　う　$\dfrac{v_p\cdot\Delta t}{L}$　　え　$-\dfrac{\Delta L}{L}m{v_x}^2$　　お　$\dfrac{3}{2}$

か　$\dfrac{1}{k}$　　き　$-\dfrac{2\Delta L}{3kL}$　　く　$-\dfrac{2\Delta L}{3L}$　　け　$V^{\frac{5}{3}}$　　こ　$\dfrac{3}{2}R(T_C-T_B)$

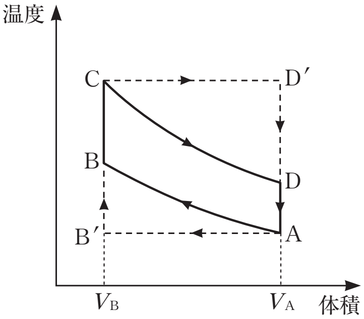
さ　$\dfrac{3}{2}R(T_D-T_A)$　　し　$1-\dfrac{T_D-T_A}{T_C-T_B}$　　す　$1-\varepsilon^{-\frac{2}{3}}$

問１



②の方が仕事は大きい。

問２



2

あ　$\dfrac{\rho_0RT_0}{w}$　　い　$\dfrac{\rho_0RT_0}{w}\left(\dfrac{T}{T_0}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$　　う　$\rho_0\left(\dfrac{T}{T_0}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}}$

え　$\dfrac{T_1}{T_1-T_0}\cdot\dfrac{M}{\rho_0}$　　お　$\dfrac{\rho_0VT_0}{wT_1}$　　か　$\dfrac{\rho_0VT_0}{wT_1}(C_V+R)(T_1-T_0)$

き　$\dfrac{\rho_0VT_0}{wT_1}C_V(T_1-T_0)$　　く　$\left(\dfrac{T_0}{T_1}+\dfrac{M}{\rho_0V}\right)^{\gamma-1}T_0$

け　$\left(\dfrac{T_0}{T_1}+\dfrac{M}{\rho_0V}\right)^{\gamma}T_1$　　こ　②

第７講　確認テスト

【解答】

1

い　$-P\cdot\Delta V$　ろ　$\Delta U+P\cdot\Delta V$　は　$\dfrac{R}{P}$　に　R　ほ　$-(\gamma-1)\dfrac{\Delta V}{V}$

へ　$\dfrac{\Delta T}{T}-\dfrac{\Delta P}{P}$　と　$\left(1-\dfrac{1}{\gamma}\right)$　ち　$\dfrac{PM}{RT}$　り　$-\dfrac{Mg}{RT}$

ぬ　$-\left(1-\dfrac{1}{\gamma}\right)\dfrac{Mg}{R}$

【解説】

(1)

い　$-P\cdot\Delta V$

ろ　$Q=\Delta U+P\cdot\Delta V$

(2)

は　$\begin{cases} PV=RT & \cdots① \\ P(V+\Delta V)=R(T+\Delta T) & \cdots② \end{cases}$

①−②より，

$P\Delta V=R\Delta T \qquad \therefore \quad \Delta V=\dfrac{R}{P}\times\Delta T$

に　$Q=\Delta U+P\Delta V$

$C_P\Delta T=C_V\Delta T+P\times\dfrac{R}{P}\Delta T$　より，$C_P-C_V=R \quad \cdots③$

(3)

ほ　熱力学第１法則より，

$Q=\Delta U+W$

$0=C_V\Delta T+P\cdot\Delta V$

①より，$P=\dfrac{RT}{V}$を代入して，

$0=C_V\Delta T+RT\cdot\dfrac{\Delta V}{V}$

③を代入

$0=C_V\dfrac{\Delta T}{T}+(C_P-C_V)\dfrac{\Delta V}{V}$

C_Vでわると

$0=\dfrac{\Delta T}{T}+\Bigl(\underbrace{\dfrac{C_P}{C_V}}_{\gamma}-1\Bigr)\dfrac{\Delta V}{V}$

$\therefore \quad \dfrac{\Delta T}{T}=-(\gamma-1)\dfrac{\Delta V}{V} \quad \cdots④$

へ　$(P+\Delta P)(V+\Delta V)=R(T+\Delta T)$　…⑤

⑤÷①より，

$$\left(1+\frac{\Delta P}{P}\right)\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)=1+\frac{\Delta T}{T}$$

$$\therefore\quad 1+\frac{\Delta P}{P}=\frac{1+\dfrac{\Delta T}{T}}{1+\dfrac{\Delta V}{V}}$$

右辺に近似式を用いて

$$1+\frac{\Delta P}{P}=1+\frac{\Delta T}{T}-\frac{\Delta V}{V}\qquad\therefore\quad\frac{\Delta V}{V}=\frac{\Delta T}{T}-\frac{\Delta P}{P}\quad\cdots⑥$$

と　⑥に④を代入して

$$\frac{\Delta T}{T}=\frac{\Delta P}{P}-\frac{1}{\gamma-1}\cdot\frac{\Delta T}{T}\qquad\therefore\quad\frac{\Delta T}{T}=\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\times\frac{\Delta P}{P}\quad\cdots⑦$$

(4)

ち　①を変形して，

$$P=\frac{w}{M}RT\div V\qquad\therefore\quad P=\frac{\rho RT}{M}\qquad\rho=\frac{PM}{RT}$$

り　$\Delta P=-\rho g\cdot\Delta z=-\dfrac{PMg}{RT}\Delta z\qquad\therefore\quad\dfrac{\Delta P}{P}=-\dfrac{Mg}{RT}\cdot\Delta z\quad\cdots⑧$

ぬ　⑧を⑦に代入して，

$$\frac{\Delta T}{T}=\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\times\left(-\frac{Mg}{RT}\Delta z\right)\qquad\therefore\quad\frac{\Delta T}{\Delta z}=-\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{Mg}{R}$$